WIRTSCHAFTSSCHULE KV CHUR

FORMAZIUN SURSELVA BILDUNG

# Abschlussprüfung 2019
# Mathematik

**Lösungen**

| | |
|---|---|
| **Material** | Arbeitsblätter, Häuschenblätter |
| **Hilfsmittel** | netzunabhängiger, nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelblatt |
| **Zeit** | 120 Minuten |

**Hinweise**

- **Beschriften Sie alle Häuschenblätter** mit Ihrem Namen und Vornamen.
- Sie müssen nicht der Reihe nach arbeiten. Kennzeichnen Sie aber jede Aufgabe mit der entsprechenden Nummer und trennen Sie die nächste Nummer mit einer waagrechten Linie ab.
- Der Lösungsweg muss überall übersichtlich dargestellt werden; unbelegte Resultate werden nicht berücksichtigt!
- Mehrfachlösungen sind nicht gestattet; Ungültiges ist deutlich zu streichen. Die gültigen Endergebnisse sind deutlich zu kennzeichnen.
- Die Lösungen und Lösungswege sind auf die bereitgelegten Häuschenblätter zu schreiben, nur die Grafiken werden direkt auf den Aufgabenblättern erstellt.

---

**Bewertung**

| Aufgabe | mögliche Punktzahl | erreichte Punktzahl |
|---|---|---|
| 1 | 6 | |
| 2 | 15 | |
| 3 | 5 | |
| 4 | 12 | |
| 5 | 9 | |
| 6 | 15 | |
| 7 | 10 | |
| 8 | 8 | |
| **8 Aufgaben** | **80** | |

## 1. Lineares Gleichungssystem (____/6)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems in der Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{c|l|}(1) & \frac{4x-6y}{8} + \frac{x+2y}{2} = \frac{91}{7} \\ (2) & \frac{5x-3y}{3} - \frac{2x-y}{5} = 12\end{array}$$

Lösung

$$\begin{array}{c|l|l}(1) & \frac{4x-6y}{8} + \frac{x+2y}{2} = \frac{91}{7} & |\cdot 8 \\ (2) & \frac{5x-3y}{3} - \frac{2x-y}{5} = 12 & |\cdot 15\end{array}$$

$\boxed{\text{(1) ohne Nenner 1}}$

$\boxed{\text{(2) ohne Nenner 1}}$

$\boxed{\text{Richtiges Verfahren 1 P}}$

$$\begin{array}{lrl}(1) & 4x-6y+4x+8y = 104 & \\ (2) & 25x-15y-6x+3y = 180 & \\ (1) & 8x+2y = 104 & |\cdot 6 \\ (2) & 19x-12y = 180 & \\ (1) & 48x+12y = 624 & \\ \hline (1)+(2) & 67x = 804 & \rightarrow x = 12 \quad \boxed{1\text{ P}} \\ \text{in (1)} & 8\cdot 12+2y = 104 & \rightarrow y = 4 \quad \boxed{1\text{ P}}\end{array}$$

$\mathbb{L} = \{(12, 4)\}$ $\boxed{1\text{ P}}$

## 2. Gleichungen (____/15)

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der unten folgenden Bruchgleichung ($\mathbb{G} = \mathbb{Q}$). (5)

$$\frac{3x-8}{x^2-8x+16} - \frac{3x+12}{x^2-16} = 4$$

Lösung

$\boxed{1\text{ P}}$

$$\frac{3x-8}{(x-4)^2} - \frac{3\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)}(x-4)} = 4 \quad |\cdot(x-4)^2 \qquad \boxed{\text{bis HN 1 P}} \qquad \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{Q}\setminus\{-4,\ 4\}$$

$$3x-8-3(x-4) = 4(x-4)^2 \qquad \boxed{\text{ohne Nenner 1 P}}$$

$$3x-8-3x+12 = 4x^2-32x+64$$

$$0 = 4x^2-32x+60$$

$$\boxed{1\text{ P}} \quad 0 = x^2-8x+15 = (x-3)(x-5) \qquad \mathbb{L} = \{3, 5\} \ \boxed{1\text{ P}}$$

oder

$$\frac{3x-8}{(x-4)^2} - \frac{3x+12}{(x+4)(x-4)} = 4 \quad /\cdot(x-4)^2(x+4) \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{Q}\setminus\{-4,\ 4\}$$

$$(3x-8)(x+4)-(x-4)(3x+12) = 4(x-4)^2(x+4)$$

$$3x^2+4x-32-3x^2+48 = (x^2-8x+16)(4x+16)$$

$$(4x+16) = (x^2-8x+16)(4x+16) \quad |:(4x+16)$$

$$1 = x^2-8x+16$$

$$0 = x^2-8x+15 = (x-3)(x-5)$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Wurzelgleichung ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$) und führen Sie die Probe durch, um Ihr Resultat zu überprüfen. (5)

$$\sqrt{5x+5} + 2x = 3$$

Lösung

$$\sqrt{5x+5} = 3 - 2x \quad |(\;\;)^2$$ 1 P

$$5x + 5 = 9 - 12x + 4x^2$$
$$0 = 4x^2 - 17x + 4$$ 1 P

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4}$$

1 P $$x_1 = \frac{17+15}{8} = 4 \rightarrow Probe: \sqrt{20+5} = 3 - 8 \;\; f$$

1 P $$x_2 = \frac{17-15}{8} = \frac{1}{4} \rightarrow Probe: \sqrt{\frac{5}{4} + 5} = 3 - \frac{1}{2} \;\; w$$ $$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$ 1 P

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Exponentialgleichung ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$). Runden Sie Ihr Resultat auf drei Dezimalstellen. (5)

$$4 \cdot 3^{2x+1} = \frac{7}{5^x}$$

Lösung

$$4 \cdot 3^{2x+1} = \frac{7}{5^x} \quad |lg$$

1 P: Exponenten vor lg
2 P: Operatoren richtig

$$\lg 4 + (2x+1)\lg 3 = \lg 7 - x \lg 5$$
$$\lg 4 + 2x \lg 3 + \lg 3 = \lg 7 - x \lg 5$$
$$2x \lg 3 + x \lg 5 = \lg 7 - \lg 4 - \lg 3$$ 1 P
$$x(2\lg 3 + \lg 5) = \lg 7 - \lg 4 - \lg 3 \quad |:(\;)$$
$$x = -0.14159$$ 1 P $$\rightarrow \mathbb{L} = \{-0.142\}$$

## 3. Textaufgaben (____/5)

Paul besitzt zwei Sparkonti. Auf dem ersten Konto hat er CHF 15'000.— und auf dem zweiten Konto CHF 20'000.— angespart. Beide Konti bringen zusammen jährlich CHF 9.50 Zinsen. Wie hoch sind die jeweiligen Zinssätze, wenn das erste Guthaben 0.005% höher verzinst wird als das zweite.

Lösung

$$9.5 = \frac{15'0\cancel{00} \cdot (p + 0.005)}{\cancel{100}} + \frac{20'0\cancel{00} \cdot p}{\cancel{100}}$$ 2 P

$$9.5 = 150p + 0.75 + 200p$$ 1 P

$$8.75 = 350p$$ 1 P

1 P $0.025 = p$ Das erste Konto wird zu 0.03% und das zweite zu 0.025% verzinst.

## 4. Quadratische Funktionen (____/12)

Gegeben ist folgende quadratische Funktion in Scheitelpunktsform $p: y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 4.5$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Form der Funktionsgleichung. (2)

Lösung 1 P

$y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - 4.5 \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4}$ 1 P

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes und der allfälligen Nullstellen. (3)

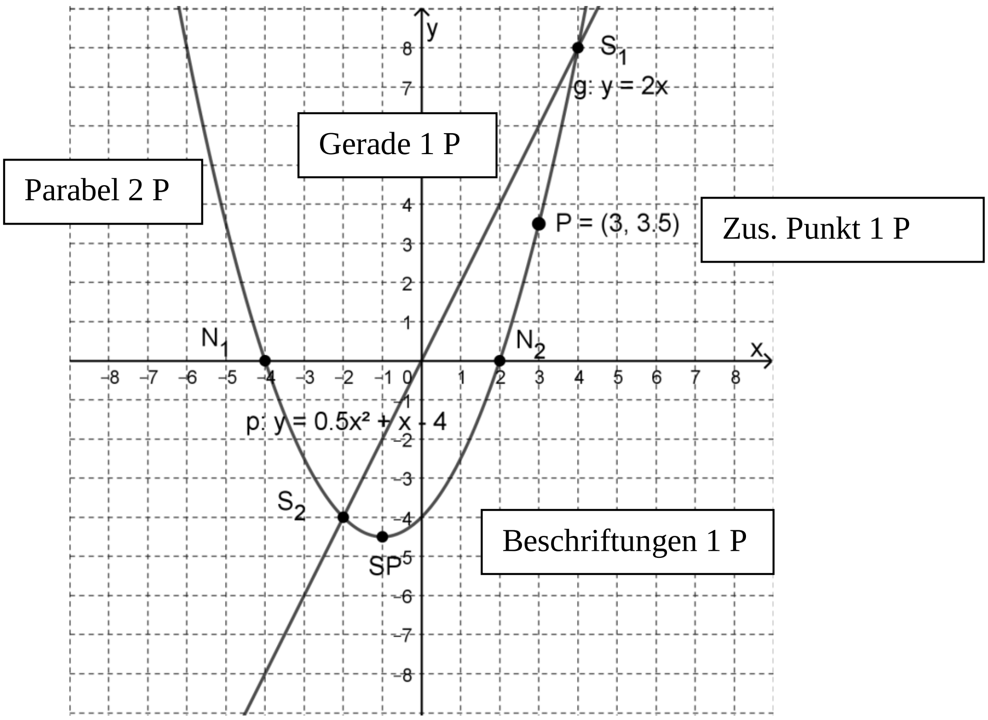
Lösung 1 P

$0 = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \rightarrow 0 = x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2) \rightarrow N_1(-4, 0);\ N_2(2, 0)$ 1 P

$SP(-1, -4.5)$ *aus Scheitelpunktsform abgelesen* 1 P

c) Zeichnen Sie den Graphen unter Mithilfe von mindestens einem weiteren berechneten Punkt in das unten folgende Koordinatensystem ein und markieren Sie die berechneten Punkte. (4)

Lösung




d) Die Gerade g schneidet die gegebene Parabel bei $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g. (2)

Lösung

*entweder ablesen* $\rightarrow m = 2$ *und* $b = 0 \rightarrow \boldsymbol{g: y = 2x}$ 2 P

*oder* $m = \frac{8-(-4)}{4-(-2)} = 2 \rightarrow$ *für* $S_1$ *gilt* $8 = 2 \cdot 4 + b \rightarrow b = 0 \rightarrow \boldsymbol{g: y = 2x}$

e) Zeichnen Sie die Gerade ins Koordinatensystem ein. (1)

## 5. Finanzmathematik/Rentenrechnung (____/9)

a) Die Stiftung „Natura Libera" will in Zukunft Projekte im Umweltbereich unterstützen. Jährlich sollen, so die Idee des Stiftungsrates, CHF 66'000.— in Projekte fliessen. Dieses Geld aber soll nicht vom Kapital der Stiftung abgezweigt werden. Es sollen nur die Zinsen investiert werden. Wann können die ersten Projekte unterstützt werden, wenn die Stiftung heute CHF 1'900'000.— bei einem Zinssatz von 3% anlegt? (5)

Lösung

1. benötigtes Kapital: $66'000 = \frac{k_0 \cdot 3}{100} \rightarrow k_0 = 2'200'000$ $\boxed{2\text{ P}}$

2. Dauer zum Ansparen: $n = \frac{\lg 2'200'000 - \lg 1'900'000}{\lg 1.03} = 4.96 \rightarrow n = 5\,Jahre$ $\boxed{2\text{ P}}$

Es dauert **6 Jahre**, bis das erste Projekt unterstützt werden kann. $\boxed{1\text{ P}}$

b) Für Frau Torelli wird ein Barwert von Fr. 10'380.- für eine nachschüssige Rente bereitgehalten. Der Zinssatz beträgt 1.5%, Laufzeit 10 Jahre.
Wie hoch wird die jährlich ausbezahlte Rente für Frau Torelli? (4)

Lösung $\boxed{2\text{ P}}$

$$r = R_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} = 10'380 \cdot \frac{1.015^{10} \cdot (1.015-1)}{1.015^{10} - 1} = 1'125.547$$ $\boxed{1\text{ P}}$

Sie erhält jährlich CHF 1'125.55 Rente. $\boxed{1\text{ P}}$

# 6. Lineare Optimierung (____/15)

Ein Betrieb möchte die Herstellung von zwei neuen Modellen von LCD-Bildschirmen, HXa (x) und HYb (y), in sein Fertigungsprogramm aufnehmen.
Der Wiederverkäufer garantiert dem Betrieb eine tägliche Abnahme von höchstens 90 HXa- und höchstens 70 HYb-Modellen.
Aus betriebswirtschaftlichen Gründen sollten höchstens dreimal so viele HYb- wie HXa-Modelle hergestellt werden.
Insgesamt müssen es aber mindestens 65 LCD-Bildschirme sein.
Der Gewinn soll maximal werden. Er beträgt pro HXa Fr. 53.- und pro HYb Fr. 67.-.

a) Erstellen Sie das lineare Programm und bestimmen Sie die Zielfunktion. (5)

Lösung 0.5 P 1.5 P 1 P 1 P 1 P

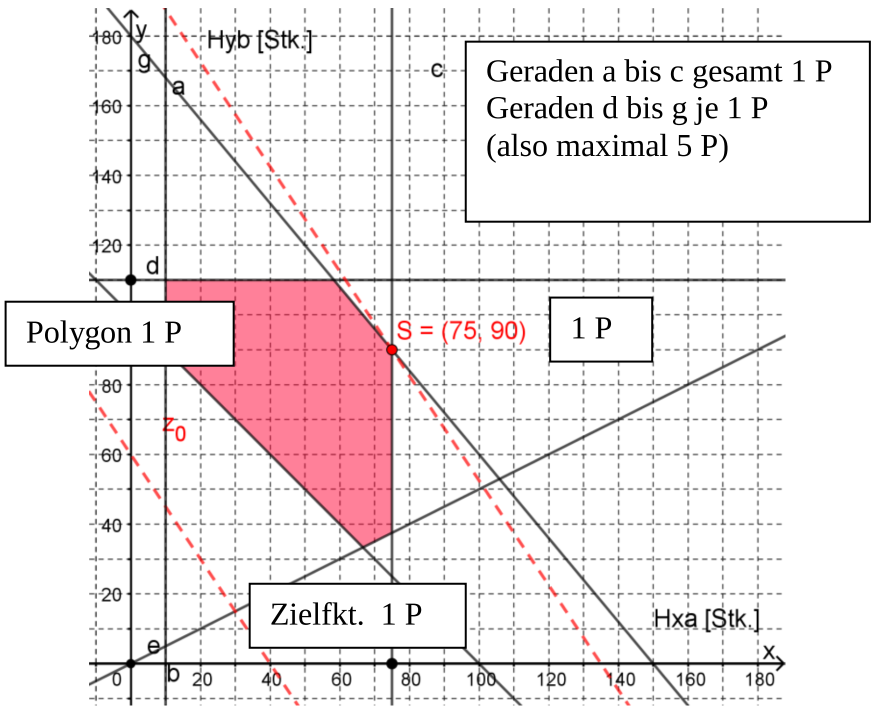
$\boldsymbol{a}: x \geq 0; \boldsymbol{b}: y \geq 0$ *oder* $\mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0; \boldsymbol{c}: x \leq 90; \boldsymbol{d}: y \leq 70; \boldsymbol{e}: y \leq 3x; \boldsymbol{f}: x + y \geq 65$ *und* $\boldsymbol{Z} = 53x + 67y$

b) **Für alle weiteren Teilaufgaben** gilt, dass durch die Änderung der Marktsituation das lineare Programm und die Zielfunktion wie folgt umgestellt werden mussten:

$\boldsymbol{a}: x \geq 10; \boldsymbol{b}: y \geq 0; \boldsymbol{c}: x \leq 75; \boldsymbol{d}: y \leq 110; \boldsymbol{e}: x \leq 2y; \boldsymbol{f}: x + y \geq 100; \boldsymbol{g}: \frac{6}{5}x + y \leq 180$ *und* $\boldsymbol{Z} = 84x + 56y$

1. Zeichnen Sie die neuen Bedingungen in das unten folgende Koordinatensystem ein und bestimmen Sie das Planungspolygon. (6)
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Zielfunktion den Punkt mit maximalem Gewinn. (2)

Lösung




3. Wie hoch ist der maximale Gewinn und bei welchen Produktionsmengen wird er erreicht? (2)

Lösung

Berechnung 1 P

$$Z = 75 \cdot 84 + 90 \cdot 56 = 11'340$$

Satz 1 P

Der maximale Gewinn beträgt CHF 11'340.— und wird mit 75 Stück HXa und 90 Stück HYb erreicht.

# 7. Datenanalyse (____/10)

a) Ordnen Sie den folgenden Datensätzen **D** und **E**, welche aus dem Turnunterricht von zwei verschiedenen Knabengruppen stammen, das richtige Diagramm **oder** den richtigen Boxplot **O** bis **R** zu. Für jeden Datensatz gibt es nur **eine** richtige Zuordnung; Mehrfachantworten sind falsch. (2)

Lösung

1 P 1 P

**D** gehört zu **O** und **E** gehört zu **R**

b) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Sprungweiten aus der unten folgenden Rangliste der Knaben einer anderen Gruppe auf Zentimeter genau. (5)

| Schülerrang | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sprungweite [cm] | 615 | 565 | 555 | 535 | 515 | 485 | 470 | 455 | 440 | 425 | 330 |

Lösung

$$Mittelwert = \frac{615+565+555+535+515+485+470+455+440+425+330}{11} = 490\ cm$$ 2 P

2 P

$$\sigma = \sqrt{\frac{125^2+75^2+65^2+45^2+25^2+5^2+20^2+35^2+50^2+65^2+160^2}{11}} = \sqrt{\frac{62'100}{11}} = 75.13 \approx 75\ cm$$ 1 P

oder

$$\sigma = \sqrt{\frac{125^2+75^2+65^2+45^2+25^2+5^2+20^2+35^2+50^2+65^2+160^2}{10}} = \sqrt{\frac{62'100}{10}} = 78.80 \approx 79\ cm$$

c) Paul aus der Gruppe von Aufgabe b) behauptet, dass Rang 1 und Rang 11 sogenannte Ausreisser seien und so die Standardabweichung stark verfälschen. Zeigen Sie durch eine einfache Berechnung oder Zeichnung, ob dies so ist. (Sie müssen dazu keinen Boxplot zeichnen, aber die Quartils können Ihnen bestimmt dabei helfen!) (3)

Lösung

$Q_1 = 440;\ Q_3 = 555 \rightarrow Boxbreite = 115$ 1 P

$440 - 1.5 \cdot 115 = 267.5;\ 555 + 1.5 \cdot 115 = 727.5$ 1 P $\rightarrow$ *Es sind* ***keine*** *Aussreisser!* 1 P

# 8. Algebraische Umformungen (____/8)

a) Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis mit Hilfe eines einzigen Bruches an. (3)

$$\frac{15x^2y^4z}{6x^3y^5z^4} + \frac{8xyz^3}{6xy^3z^4}$$

Lösung

$$\frac{15x^2y^4z}{6x^3y^5z^4} + \frac{8xyz^3}{6xy^3z^4} = \frac{5}{2xyz^3} + \frac{4}{3y^2z} = \frac{\mathbf{15y + 8xz^2}}{\mathbf{6xy^2z^3}}$$

gekürzt 1 P

Zähler 1 P

HN 1 P

b) Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich. (Tipp: Vereinfachen Sie den Zähler und den Nenner je einzeln und setzen Sie den Bruch wieder zusammen.) (5)

$$\frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+2}}{x - \frac{3x}{3 - \frac{3}{x}}}$$

Lösung

$$Zähler: \frac{x(x+2) - x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+2x-x^2+x}{(x-1)(x+2)} = \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$$ 2 P

$$Nenner: x - \frac{3x}{\frac{3x-3}{x}} = x - \frac{3x^2}{3x-3} = x - \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1x-x^2}{x-1} = \frac{-x}{x-1}$$ 2 P

$$Bruch: \frac{3x}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{x-1}{-x} = -\frac{3}{x+2}$$ 1 P